

**Fabio Grasso**

Dipartimento di Scienze Statistiche  
Università degli Studi di Roma “La Sapienza”

**TECNICA ATTUARIALE  
DELLA  
RIASSICURAZIONE TRADIZIONALE  
NEI RAMI DANNI**

SIA  
III Corso FAC  
sul tema

*“Modelli e tecniche per la riassicurazione nei rami danni”*

Roma, 13 dicembre 2019

# INDICE

1. Premesse	Pag.	3
2. Valutazione della rischiosità di un portafoglio di assicurazioni contro i danni	“	4
2.1 <i>Numero di sinistri e risarcimenti</i>	“	4
2.2 <i>Guadagno di portafoglio</i>	“	5
2.3 <i>Indice di fluttuazione ed indice di rischio</i>	“	6
2.4 <i>Indice di stabilità relativa</i>	“	8
2.5 <i>Coassicurazione e riassicurazione</i>	“	10
3. Aspetti tecnici della riassicurazione	“	11
3.1 <i>Rapporti e trattati di riassicurazione</i>	“	11
3.2 <i>Forme di riassicurazione</i>	“	13
3.3 <i>Premio di riassicurazione</i>	“	14
3.4 <i>Obiettivi della riassicurazione</i>	“	16
3.5 <i>Risarcimento globale, conservato e ceduto</i>	“	17
4. Riassicurazioni proporzionali	“	18
4.1 <i>Riassicurazione in quota</i>	“	18
4.2 <i>Riassicurazione per eccedente di somma</i>	“	20
4.3 <i>Combinazioni di riassicurazioni proporzionali</i>	“	23
4.4 <i>Riassicurazione di reciprocità</i>	“	24
5. Riassicurazioni non proporzionali	“	27
5.1 <i>Riassicurazione “excess of loss”</i>	“	27
5.2 <i>Riassicurazione “stop-loss”</i>	“	32
5.3 <i>Combinazioni di riassicurazioni non proporzionali</i>	“	33
5.4 <i>Inflazione e riassicurazione “E.CO.MO.R.”</i>	“	34
6. Riassicurazioni miste	“	35
7. Politiche ottimali di ritenzione dei rischi	“	36
Bibliografia	“	38

## 1. Premesse

E' noto come l'**attività assicurativa** sia basata sulla gestione, da parte dell'assicuratore, di un **portafoglio** costituito da contratti relativi a **rischi analoghi** (vale a dire, aventi tra loro un certo numero di caratteristiche comuni con riferimento alle tipologie e alle condizioni contrattuali di copertura, ...). La considerazione di un portafoglio di questo tipo introduce problematiche che non emergono se l'interesse è invece focalizzato sul singolo rapporto assicurativo. Tra gli altri, sono di particolare rilievo i seguenti aspetti:

- a) la **quantificazione della rischiosità del portafoglio**, effettuata mediante opportuni valori sintetici;
- b) la possibilità di operare una **limitazione della rischiosità del portafoglio**, realizzata mediante opportuni strumenti.

Con riferimento ad un portafoglio di **assicurazioni contro i danni**, sia esso del tipo **assicurazioni di danni a beni di proprietà** o del tipo **assicurazioni di responsabilità civile**, la presente relazione esamina brevemente gli aspetti a) e b) approfondendo poi la **riassicurazione**, strumento particolarmente efficace ai fini di un'adeguata riduzione della rischiosità del portafoglio.

Dopo avere sinteticamente illustrato i principali aspetti generali e contrattuali della riassicurazione, la relazione fornisce un'introduzione alla tecnica attuariale della riassicurazione per le assicurazioni contro i danni. L'esposizione è tuttavia limitata alle **garanzie riassicurative tradizionali** (vale a dire, non sono prese in esame le varie forme di **riassicurazione finanziaria** recentemente introdotte nei principali mercati riassicurativi), siano esse:

- **facoltative o obbligatorie o facoltativo-obbligatorie;**
- **individuali o globali;**
- **proporzionali o non proporzionali o miste.**

## 2. Valutazione della rischiosità di un portafoglio di assicurazioni contro i danni

### 2.1 Numero di sinistri e risarcimenti

Si consideri un portafoglio costituito da un numero,  $n$ , sufficientemente grande di contratti di assicurazione contro i danni contemporaneamente stipulati, caratterizzati da un eguale periodo di copertura (ad esempio un anno) e relativi a **rischi analoghi** con riferimento:

- a) alle caratteristiche del rischio adeguatamente valutabili all'epoca di stipulazione del contratto;
- b) alle condizioni contrattuali di copertura, ma non necessariamente anche ai valori monetari di esposizione al rischio.

Nel periodo (annuale) di copertura, siano  $X_1, X_2, \dots, X_n$  i **risarcimenti globali** a carico dell'assicuratore per i singoli contratti del portafoglio. In relazione al  $j$ -esimo ( $j=1,2,\dots,n$ ) contratto si ha

$$(1) \quad X_j = \sum_{i=0}^{N_j} Y_{i,j} ,$$

dove:

- $N_j$  è il **numero di sinistri** che colpiscono il contratto;
- $Y_{i,j}$  ( $i=0,1,\dots; Y_{0,j} \equiv 0$ ) è il **risarcimento** a carico dell'assicuratore in relazione all' $i$ -esimo sinistro in ordine cronologico.

Considerando l'intero portafoglio è quindi

$$(2) \quad X = \sum_{j=1}^n X_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^{N_j} Y_{i,j}$$

il **risarcimento globale** a carico dell'assicuratore.

## 2.2 Guadagno di portafoglio

Con riferimento alle **condizioni pure** del rapporto assicurativo, sia  $G_j$  il **guadagno**, per l'assicuratore, relativo al  $j$ -esimo contratto del dato portafoglio. Si ha quindi

$$(3) \quad G_j = \Pi_j - X_j ,$$

dove  $\Pi_j$  è il corrispondente **premio puro**.

E' immediata la determinazione dei principali valori caratteristici della distribuzione di probabilità di  $G_j$ . Innanzitutto, il valore atteso

$$(4) \quad E(G_j) = \Pi_j - P_j = r_j$$

e la varianza

$$(5) \quad \text{var}(G_j) = \text{var}(X_j) = \sigma_j^2 ,$$

dove  $P_j$  e  $r_j$  indicano, rispettivamente, il **premio equo** (vale a dire,  $P_j = E(X_j)$ ) ed il **caricamento di sicurezza** per il dato contratto.

Si definisce poi **guadagno di portafoglio** l'importo

$$(6) \quad G = \sum_{j=1}^n G_j = \Pi - X ,$$

dove è

$$(7) \quad \Pi = \sum_{j=1}^n \Pi_j = \sum_{j=1}^n (P_j + r_j) = P + r ,$$

con evidente significato di  $P$ ,  $r$  e  $\Pi$ .

Il guadagno di portafoglio,  $G$ , ha valore atteso

$$(8) \quad E(G) = \sum_{j=1}^n r_j = r$$

e, nell'ipotesi che i risarcimenti globali  $X_1, X_2, \dots, X_n$  siano tra loro indipendenti, varianza

$$(9) \quad \text{var}(G) = \text{var}(X) = \sum_{j=1}^n \sigma_j^2 = \sigma^2 .$$

### 2.3 Indice di fluttuazione ed indice di rischio

Al fine di fornire utili indicazioni sulla **rischiosità del portafoglio** vengono ora introdotte alcune grandezze sintetiche del risarcimento globale  $X$  e del guadagno di portafoglio  $G$ .

Innanzitutto si osserva che nella gestione del portafoglio l'assicuratore si prefigge di mantenere sufficientemente bassa, in particolare eguale ad una data soglia  $\eta^*$  ritenuta accettabile, la probabilità

$$(10) \quad \eta = \Pr\{G < 0\} = \Pr\{X > P + r\} ,$$

vale a dire la probabilità dell'evento **“l'onere aleatorio per risarcimenti supera l'ammontare globale dei premi puri”**.

A partire dalla (10) si può convenientemente considerare la variabile aleatoria (standardizzata)  $(X-P)/\sigma$ , essendo  $\sigma = \sigma(X)$  lo scarto quadratico medio di  $X$ . Si ha quindi

$$(11) \quad \eta = \Pr\left\{\frac{X-P}{\sigma} > \frac{r}{\sigma}\right\} = 1 - \Phi\left(\frac{r}{\sigma}\right),$$

dove  $\Phi$  è la funzione di ripartizione di  $(X-P)/\sigma$ .

Obiettivo dell'assicuratore è “controllare” la probabilità  $\eta$  mediante il caricamento di sicurezza (globale)  $r$ . Non formulando alcuna ipotesi sulla distribuzione di probabilità di  $X$ , posto

$$(12) \quad \mu = \frac{r}{\sigma},$$

si ha

$$(13) \quad \mu = \Phi^{-1}(1-\eta),$$

dove  $\Phi^{-1}(1-\eta)$  è il percentile di ordine  $(1-\eta)$  della distribuzione di probabilità di  $(X-P)/\sigma$ .

Fissato un livello,  $\eta^*$  (ad esempio  $\eta^* = 0.005$ ), che l'assicuratore ritiene accettabile per la probabilità dell'evento  $\{X > P+r\}$ , dalla (13) si ricava il valore  $\mu^*$  di  $\mu$  che consente di raggiungere il dato obiettivo.

E' immediato rilevare come il caricamento di sicurezza,  $r$ , da applicare (globalmente) al portafoglio sia proporzionale allo scarto quadratico medio,  $\sigma$ , del risarcimento globale  $X$ .

In corrispondenza di ciascun contratto del portafoglio, l'aliquota di caricamento di sicurezza (per unità di premio equo) da applicare è pertanto data dal rapporto

$$(14) \quad \frac{r}{P} = \mu \frac{\sigma}{P},$$

denominato **indice di fluttuazione** del portafoglio. Il rapporto

$$(15) \quad \rho = \frac{\sigma}{P},$$

eguale al coefficiente di variazione di  $X$ , è invece denominato **indice di rischio** del portafoglio.

## 2.4 Indice di stabilità relativa

Sulla base dalle valutazioni sintetiche di rischiosità del portafoglio ora descritte, un fondamentale obiettivo dell'assicuratore consiste poi nel mantenere sufficientemente bassa, in particolare eguale ad una data soglia  $\varepsilon^*$  ritenuta accettabile, la probabilità

$$(16) \quad \varepsilon = \Pr\{G < -W\} = \Pr\{X > W + P + r\} ,$$

vale a dire la probabilità dell'evento **“l'onere aleatorio per risarcimenti supera la somma dell'ammontare globale dei premi puri e del margine di solvibilità inizialmente a disposizione dell'assicuratore in relazione al portafoglio”**.

Nella (16) il **margine di solvibilità**,  $W$ , è costituito da mezzi propri (capitale, riserve libere) dell'assicuratore non destinati, a differenza delle riserve tecniche, alla copertura di specifici impegni in termini di valore atteso. Più precisamente,  $W$  va considerato come una quota parte del margine di solvibilità,  $W^{\text{tot}}$ , a disposizione dell'assicuratore per l'intera attività assicurativa esercitata nell'ambito delle assicurazioni contro i danni.

La probabilità dell'evento

$$(17) \quad \{X > W + P + r\}$$

è propriamente la **probabilità annuale di rovina** dell'assicuratore in relazione al portafoglio.

Si ha quindi

$$(18) \quad \varepsilon = \Pr\left\{\frac{X - P}{\sigma} > \frac{W + r}{\sigma}\right\} = 1 - \Phi\left(\frac{W + r}{\sigma}\right).$$

Nella (18), il rapporto

$$(19) \quad s = \frac{W+r}{\sigma}$$

è denominato **indice di stabilità relativa** del portafoglio.

Nell'ipotesi, qui accolta, che il portafoglio sia costituito da un numero sufficientemente grande di contratti si può convenientemente assumere l'**approssimazione normale** per la distribuzione di probabilità di  $X$  (con valore medio  $P$  e scarto quadratico medio  $\sigma$ ). In conseguenza  $\Phi$ , nella (18), è la funzione di ripartizione della distribuzione normale standardizzata.

Fissato un livello,  $\varepsilon^*$  (ad esempio  $\varepsilon^*=0.001$ ), che l'assicuratore ritiene accettabile per la probabilità annuale di rovina, dalla

$$(20) \quad s = \Phi^{-1}(1-\varepsilon^*)$$

si ottiene il valore  $s^*$  di  $s$  che consente di raggiungere il dato obiettivo.

E' immediato rilevare come la probabilità annuale di rovina,  $\varepsilon$ , decresca al crescere dell'indice di stabilità relativa,  $s$ , del portafoglio.

L'indice di stabilità relativa del portafoglio ha interesse anche quando, non formulando ipotesi sulla distribuzione di probabilità di  $(X-P)/\sigma$ , si scelga di ricorrere al calcolo di limitazioni superiori per la probabilità di rovina. In tale ambito si segnala la **disuguaglianza di Cantelli**:

$$(21) \quad \Pr\{X - P \geq t\sigma\} \leq \frac{1}{1+t^2},$$

con  $t>0$ . Dalla (21), posto  $t\sigma = W+r$  (vale a dire,  $t=s$ ), si ottiene

$$(22) \quad \Pr\{G \leq -W\} \leq \frac{1}{1+s^2}.$$

## 2.5 Coassicurazione e riassicurazione

Al fine di ridurre la probabilità annuale di rovina,  $\varepsilon$ , l'assicuratore può opportunamente operare sull'indice di stabilità relativa del portafoglio,  $s$ , incrementando almeno una delle seguenti variabili decisionali:

- il **margin**e di solvibilità,  $W$ ;
- il **caricamento di sicurezza**,  $r$ .

La prima modalità è tuttavia frequentemente ostacolata dall'effettiva situazione patrimoniale dell'assicuratore, mentre la seconda è spesso resa problematica dalle condizioni di mercato.

Nelle situazioni in cui è fortemente limitata la possibilità di intervento sulle suddette due variabili, l'assicuratore deve ricorrere a strumenti che possano accrescere l'indice di stabilità relativa del portafoglio mediante una riduzione dello scarto quadratico medio del risarcimento globale  $X$ . Operano efficacemente in questo senso:

- a) la **coassicurazione**;
- b) la **riassicurazione**.

Mediante la coassicurazione l'assicuratore assume ciascun rischio insieme ad altri assicuratori, detti **coassicuratori**, e ciascuno di essi è responsabile, in caso di sinistro, per la frazione di rischio assunta. Si attua, in questo caso, un **trasferimento del rischio su base orizzontale** (vale a dire, riferito all'epoca di stipulazione del contratto di assicurazione) e l'assicurato è pienamente a conoscenza del **rapporto coassicurativo**.

Mediante la riassicurazione l'assicuratore trasferisce invece ad un altro soggetto, detto **riassicuratore**, (almeno) una parte (di alcuni) dei rischi assunti. Si attua, in questo caso, un **trasferimento del rischio su base verticale** (vale a dire, successivo all'epoca di stipulazione del contratto di assicurazione) e l'assicurato è del tutto estraneo al **rapporto riassicurativo**.

### 3. Aspetti tecnici della riassicurazione

#### 3.1 Rapporti e trattati di riassicurazione

Nel paragrafo 2 sono state sinteticamente illustrate le ragioni che possono indurre l'assicuratore a ritenere conveniente una riduzione della rischiosità del portafoglio mediante la cessione in riassicurazione (di una parte) dei rischi assunti.

Un **rapporto di riassicurazione** si può instaurare tra l'**assicuratore cedente** ed un altro assicuratore, il quale opera come **riassicuratore cessionario**, o tra l'assicuratore cedente ed un **riassicuratore professionale**, il quale non svolge **lavoro diretto** (vale a dire, non offre copertura ai rischi provenienti direttamente dagli assicurati).

La cessione dei rischi operata da parte dell'assicuratore è denominata **riassicurazione passiva**, mentre la corrispondente assunzione dei rischi da parte del riassicuratore (cessionario o professionale) è denominata **riassicurazione attiva** (o, anche, **lavoro indiretto** in quanto tale attività non deriva dalle acquisizioni dirette dei rischi degli assicurati).

E' frequente il caso in cui il riassicuratore non accetti l'intera cessione dei rischi richiesta dall'assicuratore. In tale situazione quest'ultimo ricorrerà ad un secondo riassicuratore (eventualmente ad un terzo, ...) al quale cederà le parti residue di rischi non accettate dal primo riassicuratore.

E' poi possibile che il riassicuratore, dopo avere accolto la richiesta dell'assicuratore, proceda alla cessione ad altro riassicuratore (di una parte) dei rischi accettati. Tale **riassicurazione di secondo livello** è denominata **retrocessione** e i soggetti in essa coinvolti sono chiamati, rispettivamente, **retrocedente** e **retrocessionario**.

Il rapporto tra l'assicuratore ed il riassicuratore può avvenire secondo una delle seguenti modalità:

- a) **riassicurazione facoltativa;**
- b) **riassicurazione obbligatoria;**
- c) **riassicurazione facoltativa-obbligatoria** (o, anche, “**facob**”).

Nella riassicurazione facoltativa la cessione è effettuata contratto per contratto, secondo le specifiche esigenze dell'assicuratore. Tuttavia, il riassicuratore può non accettare la cessione.

Nella riassicurazione obbligatoria e nella riassicurazione “facob” il rapporto tra le parti è regolamentato da un **trattato di riassicurazione** che ne disciplina i diversi aspetti, innanzitutto:

- le date di inizio e fine rapporto;
- la forma riassicurativa;
- i limiti di ritenzione dell'assicuratore;
- i limiti di accettazione del riassicuratore;
- l'importo del premio di riassicurazione;
- le modalità di pagamento del premio di riassicurazione.

Nella riassicurazione obbligatoria, in particolare, l'assicuratore è obbligato a cedere assegnate quote di rischi ed il riassicuratore è obbligato ad accettarle (il trattato è pertanto anche detto **automatico**), mentre nella riassicurazione “facob” il riassicuratore è obbligato ad accettare, entro prestabiliti limiti, le quote di rischi che l'assicuratore decide di cedere.

Il rapporto di riassicurazione, qualunque sia la modalità prescelta, può inoltre essere definito in base ad un approccio:

- a) **individuale** (vale a dire, con riferimento al singolo contratto): in questo caso si ha una **riassicurazione individuale;**
- b) **globale** (vale a dire, con riferimento all'intero portafoglio): in questo caso si ha una **riassicurazione globale.**

## 3.2 Forme di riassicurazione

Con riferimento alle modalità di cessione dei rischi al riassicuratore si distinguono le seguenti forme di riassicurazione:

- a) **riassicurazione proporzionale;**
- b) **riassicurazione non proporzionale.**

Nella riassicurazione proporzionale l'assicuratore ed il riassicuratore si accordano su una ripartizione di ciascun rischio del portafoglio. Nella medesima proporzione viene ripartito il risarcimento relativo a ciascun eventuale sinistro.

Nella riassicurazione non proporzionale, invece, l'assicuratore ed il riassicuratore si accordano generalmente su un **importo monetario** corrispondente al massimo risarcimento che l'assicuratore è disposto ad effettuare, secondo la particolare modalità riassicurativa prescelta, in relazione:

- ad un sinistro che colpisce un dato contratto del portafoglio;
- ai sinistri che, derivanti da un unico evento di natura catastrofale, colpiscono più contratti del portafoglio;
- ai sinistri che, nel corso di un anno, colpiscono il portafoglio.

Con riferimento a quest'ultima modalità l'accordo tra le parti può, in alternativa, essere basato sul **rapporto percentuale sinistri a premi (puri o di tariffa) di competenza** del portafoglio, considerando una limitazione espressa in termini percentuali (e non in termini monetari) ai fini della ripartizione del risarcimento globale tra le parti.

Nella pratica riassicurativa le forme proporzionali e non proporzionali sono frequentemente combinate tra loro, definendo in tal modo varie **riassicurazioni miste** efficaci per le diverse esigenze dell'assicuratore e del riassicuratore.

### 3.3 Premio di riassicurazione

A fronte della cessione di rischi l'assicuratore deve corrispondere al riassicuratore un **premio di riassicurazione**, il quale rappresenta quindi il prezzo della garanzia riassicurativa. Esso comprende sia un **caricamento di sicurezza** sia un **caricamento per spese** ed è inoltre fortemente influenzato da vari fattori di natura non tecnica quali, in particolare, le **condizioni del mercato riassicurativo** ed il **rapporto esistente tra l'assicuratore ed il riassicuratore**.

Con specifico riferimento alla determinazione del **premio equo di riassicurazione** occorre distinguere tra riassicurazioni proporzionali e riassicurazioni non proporzionali. In relazione alle prime si rileva che tale premio è ricavato applicando la percentuale di trasferimento del rischio al premio della copertura assicurativa di base. In relazione alle seconde possono essere utilmente impiegati i seguenti metodi:

- a) il **metodo dell'“exposure rating”**, mediante il quale il premio equo viene determinato ripartendo il premio della copertura assicurativa di base tra l'assicuratore ed il riassicuratore in misura proporzionale all'esposizione al rischio delle parti;
- b) il **metodo dell'“experience rating”**, mediante il quale l'esperienza di sinistrosità, riferita ad un'opportuna collettività di rischi riassicurati, è utilizzata:
  - in **modo retrospettivo**, per adeguare nel tempo il premio equo relativo ad un rischio riassicurato;
  - in **modo prospettivo**, per ottenere la stima iniziale del premio equo relativo ad un nuovo rischio riassicurato.

Con riferimento al metodo dell'“experience rating” si osserva come nella pratica riassicurativa sia frequentemente in uso il **metodo del “burning cost”**: esso è basato sul rapporto percentuale sinistri a premi di competenza osservato dal riassicuratore, in un dato intervallo di tempo (annuale o pluriennale), su un portafoglio di rischi riassicurati.

Per quel che riguarda il **caricamento di sicurezza** si osserva che l'analogo margine applicato nella copertura assicurativa di base costituisce soltanto un elemento di riferimento ai fini del calcolo di tale grandezza, anche per le forme riassicurative proporzionali. Infatti, occorre considerare che:

- la cessione dei rischi in riassicurazione determina il trasferimento al riassicuratore di **utili** attesi dall'assicuratore; in conseguenza a quest'ultimo è riconosciuta una **provvigione di riassicurazione** più o meno consistente a seconda della forma riassicurativa adottata;
- le diverse forme di riassicurazione sono caratterizzate da differenti livelli di **esposizione al rischio del riassicuratore** e comportano pertanto l'esigenza, da parte di quest'ultimo, di introdurre differenti livelli di caricamento di sicurezza nel premio puro (vale a dire, varia il "sacrificio" richiesto all'assicuratore in termini di valore atteso del guadagno di portafoglio);
- la **base statistica** utilizzata dal riassicuratore per la valutazione dei rischi riassicurati non coincide necessariamente con quella adottata dall'assicuratore al momento dell'assunzione dei medesimi rischi.

Per quanto concerne, in particolare, la provvigione di riassicurazione si segnala come essa sia di norma ottenuta come percentuale dei premi e possa essere determinata:

- a) **a priori**;
- b) **a posteriori**.

Nel primo caso essa è detta **provvigione fissa**, mentre nel secondo caso è detta **provvigione scalare**. In relazione a quest'ultima le parti concordano generalmente una **provvigione provvisoria** che viene inizialmente applicata e poi eventualmente adeguata alla fine del rapporto riassicurativo. L'adeguamento della provvigione è realizzato frequentemente in modo tale da premiare l'assicuratore nel caso in cui l'onere per sinistri osservato, in rapporto al volume dei premi incassati, sia stato inferiore alle attese.

### 3.4 Obiettivi della riassicurazione

Una precisa definizione degli obiettivi che l'assicuratore si prefigge di realizzare mediante il ricorso alla riassicurazione è di fondamentale importanza ai fini della scelta della più opportuna forma riassicurativa (proporzionale o non proporzionale, individuale o globale, ...) oltrechè delle specifiche modalità attuative di tale forma.

L'obiettivo principale della riassicurazione, considerando il punto di vista dell'assicuratore, è la **riduzione della rischiosità** del portafoglio. In conseguenza si determina anche un **aumento della capacità di assunzione dei rischi**.

Ai suddetti obiettivi si aggiunge la considerazione che il ricorso alla riassicurazione può determinare un significativo **rafforzamento della solvibilità** dell'assicuratore, ad esempio misurata mediante il rapporto tra l'ammontare dei mezzi propri (capitale, riserve libere) ed il volume dei premi calcolati al netto delle cessioni in riassicurazione.

E' interessante segnalare inoltre come l'introito della provvigione di riassicurazione attribuisca all'assicuratore risorse finanziarie mediante le quali egli può sostenere il **finanziamento della nuova produzione**.

Il rapporto riassicurativo fa anche sì che l'assicuratore possa ricevere, nella fase di progettazione di nuovi prodotti assicurativi, un'adeguata **assistenza tecnica** (innanzitutto, nella **scelta delle basi tecniche**) da parte del riassicuratore, in special modo se il rapporto viene instaurato con un riassicuratore professionale.

Dal punto di vista del riassicuratore va segnalato invece l'obiettivo di partecipare alla totalità (o, quanto meno, alla gran parte) degli impegni assunti dall'assicuratore.

### 3.5 Risarcimento globale, conservato e ceduto

Ai fini della descrizione formale degli aspetti tecnico-attuariali della riassicurazione si consideri un portafoglio costituito da  $n$  contratti di assicurazione contro i danni contemporaneamente stipulati e di durata annuale. Siano, inoltre,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  i risarcimenti globali a carico dell'assicuratore.

La riassicurazione del portafoglio può essere opportunamente descritta tramite una  $n$ -pla di applicazioni

$$(23) \quad X_j \longrightarrow X_j^A, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

che precisano, nei riguardi dei **singoli contratti** del portafoglio, il **risarcimento globale conservato** dall'assicuratore, indicato con  $X_j^A$ , ed il **risarcimento globale ceduto** al riassicuratore, indicato con  $X_j^B$  e dato dalla

$$(24) \quad X_j^R = X_j - X_j^A.$$

Con riferimento all'**intero portafoglio** si ha il **risarcimento globale conservato** dall'assicuratore,  $X^A$ , vale a dire

$$(25) \quad X^A = \sum_{j=1}^n X_j^A,$$

ed il **risarcimento globale ceduto** al riassicuratore,  $X^R$ , vale a dire

$$(26) \quad X^R = \sum_{j=1}^n X_j^R.$$

## 4. Riassicurazioni proporzionali

Nell'ambito della riassicurazione proporzionale si hanno le seguenti forme riassicurative:

- a) **riassicurazione in quota;**
- b) **riassicurazione per eccedente di somma.**

Entrambe le suddette garanzie riassicurative prevedono che il rapporto tra l'assicuratore ed il riassicuratore sia definito a livello di singolo contratto.

Notevole interesse, anche per le applicazioni, rivestono inoltre alcune combinazioni della riassicurazione in quota e della riassicurazione per eccedente di somma.

### 4.1 Riassicurazione in quota

Nella **riassicurazione in quota** (o, anche, **riassicurazione "quota-share"**) l'assicuratore ed il riassicuratore fissano un'unica **aliquota di conservazione** (o di **ritenzione**) che è applicata all'esposizione monetaria associata a ciascun contratto del portafoglio, essendo tale esposizione espressa in termini di:

- valore (del bene) assicurato oppure di massimo danno probabile, nel caso di assicurazioni di danni a beni di proprietà;
- massimale di garanzia, nel caso di assicurazioni di responsabilità civile.

Con riferimento, ad esempio, ad un portafoglio di assicurazioni di danni a beni di proprietà costituito da  $n$  contratti contemporaneamente stipulati, di durata annuale e con valori assicurati  $V_1, V_2, \dots, V_n$ , sia  $a$  ( $0 < a < 1$ ) l'aliquota di conservazione concordata tra le parti e, quindi,  $(1-a)$  l'aliquota corrispondente alla cessione in riassicurazione.

In relazione al  $j$ -esimo contratto del portafoglio il valore assicurato conservato dall'assicuratore è quindi

$$(27) \quad V_j^A = aV_j ,$$

mentre il valore assicurato ceduto al riassicuratore è

$$(28) \quad V_j^R = (1-a)V_j .$$

In relazione all'intero portafoglio il risarcimento globale conservato dall'assicuratore è

$$(29) \quad X^A = \sum_{j=1}^n X_j^A = a \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^{N_j} Y_{i,j} ,$$

mentre il risarcimento globale ceduto al riassicuratore è

$$(30) \quad X^R = \sum_{j=1}^n X_j^R = (1-a) \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^{N_j} Y_{i,j} .$$

La riassicurazione in quota, molto semplice a fini operativi, riesce ad aumentare significativamente la capacità di assunzione dei rischi da parte dell'assicuratore. A fronte di tali aspetti positivi essa, malgrado riduca la variabilità (in termini assoluti) del risarcimento globale a carico dell'assicuratore, non realizza un'efficace omogeneizzazione dei valori assicurati e, quindi, non ottiene una soddisfacente riduzione della rischiosità del portafoglio.

Dal punto di vista del riassicuratore va evidenziato l'aspetto positivo derivante dalla sua partecipazione alla totalità degli impegni assunti dall'assicuratore.

## 4.2 Riassicurazione per eccedente di somma

Nella **riassicurazione per eccedente di somma** (o, anche, **riassicurazione “surplus”**) l'assicuratore ed il riassicuratore fissano un **pieno di conservazione** corrispondente alla massima esposizione al rischio, in termini monetari, che l'assicuratore accetta di conservare per ciascun contratto.

Con riferimento ad un portafoglio di assicurazioni di danni a beni di proprietà costituito da  $n$  contratti contemporaneamente stipulati, di durata annuale e con valori assicurati  $V_1, V_2, \dots, V_n$ , sia quindi  $C$  il pieno di conservazione concordato tra le parti.

In relazione al  $j$ -esimo contratto del portafoglio la riassicurazione per eccedente di somma individua pertanto l'aliquota di conservazione

$$(31) \quad a_j = \frac{\min(V_j; C)}{V_j} = \min\left(\frac{C}{V_j}; 1\right),$$

con  $0 \leq a_j \leq 1$ .

Il valore assicurato conservato dall'assicuratore è

$$(32) \quad V_j^A = \min(V_j; C),$$

mentre il valore assicurato ceduto al riassicuratore, detto **eccedente** (o, anche, **“surplus”**), è

$$(33) \quad V_j^R = \max(V_j - C; 0).$$

In relazione all'intero portafoglio il risarcimento globale conservato dall'assicuratore è

$$(34) \quad X^A = \sum_{j=1}^n X_j^A = \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^{N_j} a_j Y_{i,j},$$

mentre il risarcimento globale ceduto al riassicuratore è

$$(35) \quad X^R = \sum_{j=1}^n X_i^R = \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^{N_j} (1 - a_j) Y_{i,j}.$$

La riassicurazione per eccedente di somma, contraddistinta da una maggiore complessità operativa rispetto alla riassicurazione in quota, realizza un'efficace omogeneizzazione dei valori assicurati (quindi, una significativa riduzione della rischiosità del portafoglio).

L'efficacia di tale forma riassicurativa è altresì testimoniata dal fatto che essa comporta, a parità di sacrificio per l'assicuratore in termini di valore atteso del guadagno di portafoglio (vale a dire, in termini di caricamento di sicurezza), una maggiore riduzione della probabilità di rovina rispetto al caso della riassicurazione in quota.

E' stato poi dimostrato che, sotto opportune ipotesi, la riassicurazione per eccedente di somma rappresenta la garanzia riassicurativa che ottiene la minima probabilità di rovina per ogni assegnato livello di sacrificio fissato dall'assicuratore.

Per quanto concerne la provvigione di riassicurazione riconosciuta all'assicuratore si osserva che in questo caso essa è di norma inferiore a quella prevista nella riassicurazione in quota poichè la cessione riguarda ora i rischi più grandi (generalmente, i peggiori) e gli utili attesi trasferiti al riassicuratore sono pertanto sensibilmente ridotti.

Nella riassicurazione per eccedente di somma i **limiti di accettazione** stabiliti dal riassicuratore sono tradizionalmente espressi in multipli interi del pieno di conservazione, come è evidenziato nel seguente esempio 1.

### Esempio 1

Si consideri un'assicurazione di danni a beni di proprietà avente valore assicurato  $V$  e si adotti per essa una riassicurazione per eccedente di somma. Sia, inoltre,  $C$  il fissato pieno di conservazione.

Se è  $C < V$ , vale la

$$(36) \quad V = nC + S ,$$

con  $n$  intero non negativo e  $0 \leq S < C$ .

In tal caso l'assicuratore richiede la copertura dell'importo

$$(37) \quad V - C = (n-1) C + S .$$

Una prima copertura, detta **riassicurazione di primo eccedente**, offre la copertura di  $m$  pieni di conservazione. In conseguenza:

- se è  $m \geq n$ , il riassicuratore garantisce all'assicuratore la copertura dell'importo  $V-C$ ;
- se invece è  $m < n-1$ , oppure  $m = n-1$  e  $S > 0$ , rimane da riassicurare l'importo

$$V - C - mC = (n-m-1)C + S$$

e l'assicuratore ricorrerà ad un secondo riassicuratore, stipulando una **riassicurazione di secondo eccedente**. Se necessario, egli stipulerà una **riassicurazione di terzo eccedente** e così via fino al raggiungimento dell'obiettivo stabilito.

### 4.3 Combinazioni di riassicurazioni proporzionali

Nei mercati riassicurativi sono frequentemente applicate combinazioni delle coperture riassicurative proporzionali in quota e per eccedente di somma. Si segnalano, in particolare, quelle descritte nei seguenti esempi 2 e 3, con riferimento ad un portafoglio di assicurazioni di danni a beni di proprietà costituito da  $n$  contratti contemporaneamente stipulati, di durata annuale e con valori assicurati  $V_1, V_2, \dots, V_n$ .

#### Esempio 2

Si consideri un assicuratore che conservi la quota  $a$  ( $0 < a < 1$ ) di ciascun contratto del portafoglio, con una massima esposizione monetaria eguale al pieno di conservazione  $C$ . In relazione al  $j$ -esimo contratto del portafoglio si individua pertanto l'aliquota di conservazione

$$(38) \quad a'_j = \frac{\min(aV_j; C)}{V_j} = \min\left(\frac{C}{V_j}; a\right)$$

ed è immediata la determinazione dei risarcimenti globali  $X^A$  e  $X^R$ .

#### Esempio 3

Si consideri un assicuratore che conservi la quota  $a$  ( $0 < a < 1$ ) di ciascun contratto del portafoglio per il quale ha in precedenza operato una cessione riassicurativa per eccedente di somma con pieno di conservazione  $C$ . In relazione al  $j$ -esimo contratto del portafoglio si individua pertanto l'aliquota di conservazione

$$(39) \quad a''_j = \frac{a \min(V_j; C)}{V_j} = \min\left(\frac{aC}{V_j}; a\right)$$

ed è immediata anche in questo caso la determinazione dei risarcimenti globali  $X^A$  e  $X^R$ .

#### 4.4 Riassicurazione di reciprocità

Un trattato di riassicurazione proporzionale tra due assicuratori, nel seguito indicati con A e B, può anche prevedere una **clausola di reciprocità**, in base alla quale A e B concordano la reciproca cessione, in un'assegnata misura, dei rischi direttamente acquisiti sul mercato.

La **riassicurazione di reciprocità** ha una duplice conseguenza positiva sui singoli assicuratori:

- a) mediante la cessione di quote di rischi (riassicurazione passiva), diminuisce la variabilità dell'onere aleatorio per risarcimenti;
- b) mediante l'accettazione di quote di rischi (riassicurazione attiva), aumenta la dimensione del portafoglio.

Nei mercati riassicurativi è frequentemente in uso, a tale riguardo, l'accordo tra gli assicuratori A e B che prevede un **frazionamento dei rischi proporzionale all'introito dei premi** (relativi al lavoro diretto). Indicati con  $P_A$  e  $P_B$  i premi incassati, rispettivamente, da A e B, si ha quindi che l'assicuratore A trattiene la quota

$$(40) \quad a = \frac{P_A}{P_A + P_B}$$

dei rischi, mentre l'assicuratore B trattiene la quota

$$(41) \quad 1 - a = \frac{P_B}{P_A + P_B} .$$

In termini di premi, ad A spettano gli importi  $aP_A$  (per la parte trattenuta) e  $aP_B$  (per la parte accettata in riassicurazione); in corrispondenza, a B spettano gli importi  $(1-a)P_A$  e  $(1-a)P_B$ . In conseguenza di tale accordo (di reciprocità) non si ha quindi alcun trasferimento di premi tra A e B.

Indicati poi con  $X_A$  e  $X_B$  i risarcimenti globali aleatori rispettivamente a carico di A e B, a seguito della riassicurazione il risarcimento globale a carico di A,  $X_{AR}$ , diviene

$$(42) \quad X_{AR} = a (X_A + X_B) ,$$

mentre quello a carico di B,  $X_{BR}$ , è

$$(43) \quad X_{BR} = (1-a) (X_A + X_B) .$$

In termini di varianza si ha, rispettivamente,

$$(44) \quad \begin{aligned} \sigma^2(X_{AR}) &= a^2 [\sigma^2(X_A) + \sigma^2(X_B) + 2 \sigma(X_A, X_B)] \\ &= a^2 (1 + 2\rho b + b^2) \sigma^2(X_A) , \end{aligned}$$

$$(45) \quad \begin{aligned} \sigma^2(X_{BR}) &= (1-a)^2 [\sigma^2(X_A) + \sigma^2(X_B) + 2 \sigma(X_A, X_B)] \\ &= (1-a)^2 \left( \frac{1 + 2\rho b + b^2}{b^2} \right) \sigma^2(X_B) , \end{aligned}$$

avendo posto

$$(46) \quad \sigma^2(X_B) = b^2 \sigma^2(X_A) ,$$

$$(47) \quad \sigma(X_A, X_B) = \rho \sigma(X_A) \sigma(X_B) ,$$

dove  $\rho$  è il **coefficiente di correlazione**.

L'assicuratore A ottiene pertanto una riduzione di varianza per valori di  $b$  tali che si abbia

$$(48) \quad 1 + 2\rho b + b^2 < \frac{1}{a^2} ,$$

mentre l'assicuratore B realizza l'analogo obiettivo se è

$$(49) \quad \frac{1 + 2pb + b^2}{b^2} < \frac{1}{(1-a)^2}.$$

Nell'ipotesi che la covarianza tra  $X_A$  e  $X_B$  non sia negativa, la riduzione di varianza è pertanto una funzione decrescente di  $b$  per l'assicuratore A, mentre essa è una funzione crescente di  $b$  per l'assicuratore B.

Un accordo ottimo tra gli assicuratori A e B può essere quello che determina un'**eguale riduzione di varianza**, vale a dire

$$(50) \quad \frac{\sigma^2(X_A) - \sigma^2(X_{AR})}{\sigma^2(X_A)} = \frac{\sigma^2(X_B) - \sigma^2(X_{BR})}{\sigma^2(X_B)}.$$

Tale obiettivo si realizza in corrispondenza del valore

$$(51) \quad b = \frac{1-a}{a},$$

quindi se è

$$(52) \quad \frac{P_A}{P_B} = \frac{\sigma(X_A)}{\sigma(X_B)}.$$

In base alla (52) è del tutto evidente come due assicuratori che abbiano pressoché eguali volumi di premi (relativi al lavoro diretto) e scarto quadratico medio degli oneri aleatori per risarcimenti (vale a dire,  $b \approx 1$ ) traggano il massimo vantaggio nell'accordarsi su una riassicurazione di reciprocità che stabilisca la ripartizione dei rischi assunti nella misura del 50% (vale a dire,  $a = 1/2$ ).

## 5. Riassicurazioni non proporzionali

Nell'ambito della riassicurazione non proporzionale si hanno le seguenti forme riassicurative:

- a) **riassicurazione “excess of loss”**;
- b) **riassicurazione “stop-loss”**.

Notevole interesse, anche per le applicazioni, rivestono inoltre alcune combinazioni delle suddette forme riassicurative.

### 5.1 Riassicurazione “excess of loss”

Nella **riassicurazione “excess of loss”** l'assicuratore e il riassicuratore fissano un importo monetario, denominato **priorità**, corrispondente al massimo risarcimento che l'assicuratore è disponibile ad effettuare, secondo la particolare modalità riassicurativa prescelta, in relazione:

- a) ad un sinistro che colpisce un dato contratto del portafoglio: in tal caso si ha la **riassicurazione “per risk excess of loss”**;
- b) ai sinistri che, derivanti da un unico evento di natura catastrofale, colpiscono più contratti del portafoglio: in tal caso si ha la **riassicurazione “catastrophe excess of loss”**;
- c) ai sinistri che, nel corso di un anno, colpiscono il portafoglio: in tal caso si ha la **riassicurazione “aggregate excess of loss”**.

Il rapporto tra le parti è definito a livello di singolo contratto nella riassicurazione “per risk excess of loss”, mentre è definito a livello di portafoglio sia nella riassicurazione “catastrophe excess of loss” sia nella riassicurazione “aggregate excess of loss”.

Di seguito sono brevemente descritti i profili attuariali delle suddette tipologie di riassicurazione “excess of loss”.

### a) Riassicurazione “per risk excess of loss”

Con riferimento, ad esempio, ad un portafoglio di assicurazioni di responsabilità civile costituito da  $n$  contratti contemporaneamente stipulati, di durata annuale e con massimali di garanzia  $M_1, M_2, \dots, M_n$ , si consideri il  $j$ -esimo contratto e sia, inoltre,  $L_j$  la **priorità** fissata in corrispondenza di tale contratto.

In relazione all' $i$ -esimo sinistro che colpisce il contratto in esame la **riassicurazione “per risk excess of loss”** fa sì che rimanga a carico dell'assicuratore l'importo

$$(53) \quad Y_{i,j}^A = \min(Y_{i,j}; L_j) .$$

Nell'ipotesi che il trattato non preveda limiti di accettazione da parte del riassicuratore o, in altri termini, nell'ipotesi che la massima esposizione, denominata **portata**, di quest'ultimo nei confronti di un sinistro sia **totale** (vale a dire, eguale alla differenza  $M_j - L_j$ ), è trasferita al riassicuratore l'intera eccedenza rispetto alla priorità. Si ha

$$(54) \quad Y_{i,j}^R = \max(Y_{i,j} - L_j; 0) .$$

In relazione all'intero portafoglio il risarcimento globale conservato dall'assicuratore è

$$(55) \quad X^A = \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^{N_j} Y_{i,j}^A = \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^{N_j} \min(Y_{i,j}; L_j) ,$$

mentre il risarcimento globale ceduto al riassicuratore è

$$(56) \quad X^R = \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^{N_j} Y_{i,j}^R = \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^{N_j} \max(Y_{i,j} - L_j; 0) .$$

Nella pratica riassicurativa la portata prevista nella copertura “per risk excess of loss” è generalmente **parziale** (vale a dire, inferiore alla differenza  $M_j - L_j$ ). L’assicuratore deve pertanto procurarsi ulteriori coperture riassicurative, tradizionalmente articolate in **fasce** (o, anche, “**layers**”).

Indicata con  $Q_j$  la portata parziale del riassicuratore, il risarcimento ceduto a quest’ultimo, in relazione all’ $i$ -esimo sinistro che colpisce il  $j$ -esimo contratto del portafoglio, è quindi

$$(57) \quad Y_{i,j}^R = \min[\max(Y_{i,j} - L_j; 0); Q_j].$$

### **b) Riassicurazione “catastrophe excess of loss”**

Con riferimento ad un portafoglio di assicurazioni di responsabilità civile costituito da  $n$  contratti contemporaneamente stipulati e di durata annuale, sia  $Z$  il risarcimento globale relativo ai sinistri che, derivanti da un unico **evento di natura catastrofale**, colpiscono più contratti del portafoglio. Sia, inoltre,  $L^C$  la **priorità** fissata in corrispondenza di tale evento, anche denominata **pieno catastrofale**.

La definizione di **catastrofe** è generalmente data in termini di numero minimo di sinistri che colpiscono i contratti del portafoglio entro un assegnato intervallo di tempo dal verificarsi dell’evento.

La catastrofe, in particolare, può essere:

- a) di tipo “**naturale**” (ad esempio un’alluvione o un terremoto o un uragano);
- b) di tipo “**man-made**” (ad esempio un incendio o un’esplosione o un disastro dell’aviazione o della navigazione, essendo l’evento in ogni caso conseguenza delle attività umane).

Mediante la **riassicurazione “catastrophe excess of loss”** rimane a carico dell'assicuratore l'importo

$$(58) \quad Z^A = \min(Z; L^C).$$

Nell'ipotesi che l'intervento del riassicuratore non preveda alcuna limitazione superiore (vale a dire, nel caso di portata totale) è trasferita a quest'ultimo l'intera eccedenza rispetto alla priorità, vale a dire

$$(59) \quad Z^R = \max(Z - L^C; 0),$$

mentre è

$$(60) \quad Z^R = \min[\max(Z - L^C; 0); Q^C]$$

nell'ipotesi (realistica) di portata parziale  $Q^C$ .

Si indichi inoltre con  $K$  il numero aleatorio di catastrofi che colpiscono il portafoglio nel corso dell'anno e con  $Z_h$  ( $h=1,2,\dots,K$ ) il risarcimento globale corrispondente all' $h$ -esima catastrofe in ordine cronologico.

Stabilito il pieno catastofale,  $L^C$ , il risarcimento globale conservato dall'assicuratore è quindi

$$(61) \quad X^A = \sum_{h=0}^K \min(Z_h; L^C),$$

mentre il risarcimento globale ceduto al riassicuratore è

$$(62) \quad X^R = \sum_{h=0}^K \max(Z_h - L^C; 0).$$

### c) Riassicurazione “aggregate excess of loss”

Con riferimento ad un portafoglio di assicurazioni di responsabilità civile costituito da  $n$  contratti contemporaneamente stipulati e di durata annuale, si indichi con  $L^G$  la priorità fissata in corrispondenza del portafoglio, anche denominata **priorità globale**.

Il risarcimento globale conservato dall'assicuratore, nel caso operi la **riassicurazione “aggregate excess of loss”**, è

$$(63) \quad X^A = \min(X; L^G).$$

Nell'ipotesi di portata totale da parte del riassicuratore viene pertanto ceduto a quest'ultimo l'importo

$$(64) \quad X^R = \max(X - L^G; 0),$$

mentre si ha

$$(65) \quad X^R = \min[\max(X - L^G; 0); Q^G]$$

nell'ipotesi (realistica) di portata parziale  $Q^G$ .

La riassicurazione “aggregate excess of loss” è molto vantaggiosa per l'assicuratore, il quale ottiene in tal modo la copertura dell'eventuale eccedenza positiva del risarcimento globale nei confronti della sua previsione. Tale copertura non è altrettanto gradita dal riassicuratore a causa dell'elevata aleatorietà connessa ai risarcimenti trasferiti a suo carico. In ragione di questa sua caratteristica essa prevede pertanto l'introduzione nel premio di riassicurazione di un più consistente caricamento di sicurezza rispetto ad altre forme di riassicurazione.

Frequente è inoltre l'uso di tale copertura in combinazione con una riassicurazione proporzionale, in quota o per eccedente di somma (un esempio è presentato nel successivo paragrafo 6).

## 5.2 Riassicurazione “stop-loss”

Nella **riassicurazione “stop-loss”** l’assicuratore ed il riassicuratore stabiliscono un valore per il rapporto percentuale sinistri a premi di competenza del portafoglio, corrispondente al massimo risarcimento che, espresso in percentuale dei premi, l’assicuratore è disponibile ad effettuare in relazione ai sinistri che colpiscono il portafoglio in un anno. Il valore concordato tra le parti è denominato **priorità globale**.

La riassicurazione “stop-loss” è definita a livello di portafoglio ed opera in modo analogo alla riassicurazione “aggregate excess of loss”, con l’unica differenza che per la priorità globale viene ora considerato un valore percentuale anziché un valore monetario.

Con riferimento ad un portafoglio di assicurazioni di responsabilità civile costituito da  $n$  contratti contemporaneamente stipulati e di durata annuale, si indichi con  $q$  il rapporto aleatorio sinistri a premi di competenza del portafoglio e con  $q^{SL}$  la fissata priorità globale. In conseguenza l’assicuratore conserva la percentuale

$$(66) \quad q^A = \min(q; q^{SL})$$

dell’ammontare globale dei premi incassati nell’anno, mentre viene ceduta al riassicuratore la percentuale

$$(67) \quad q^R = \max(q - q^{SL}; 0)$$

o la percentuale

$$(68) \quad q^R = \min[\max(q - q^{SL}; 0); q^*]$$

di tali premi nell’ipotesi che la portata fissata dal riassicuratore sia, rispettivamente, totale o parziale (ed eguale a  $q^*$ ).

Per quanto riguarda il gradimento di questa forma riassicurativa da parte dell’assicuratore e del riassicuratore vale quanto già espresso in relazione alla riassicurazione “aggregate excess of loss”.

### 5.3 Combinazioni di riassicurazioni non proporzionali

Nei mercati riassicurativi vengono frequentemente applicate alcune combinazioni di forme riassicurative non proporzionali. Si segnala, in particolare, quella descritta nel seguente esempio 4, con riferimento ad un portafoglio di assicurazioni di responsabilità civile costituito da  $n$  contratti contemporaneamente stipulati e di durata annuale.

#### Esempio 4

Si consideri la combinazione di una riassicurazione “per risk excess of loss” con una riassicurazione “aggregate excess of loss”, in accordo alle seguenti ipotesi:

- a) la riassicurazione “per risk excess of loss” è caratterizzata, con riferimento al  $j$ -esimo contratto del portafoglio, da una priorità  $L_j$  e da una portata parziale  $Q_j$ ;
- b) la riassicurazione “aggregate excess of loss” è caratterizzata da una priorità  $L^G$  e da una portata parziale  $Q^G$ .

In tali ipotesi il risarcimento globale conservato dall’assicuratore è

$$(69) \quad X^A = \min (X_{(1)}^A; L^G) ,$$

essendo

$$(70) \quad X_{(1)}^A = \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^{N_j} \min (Y_{i,j}; L_j)$$

il risarcimento globale conservato dall’assicuratore per effetto della operatività della sola componente “per risk excess of loss”.

Il corrispondente risarcimento globale ceduto al riassicuratore è

$$(71) \quad X^R = \min [\max (X_{(1)}^R - L^G; 0); Q^G] ,$$

essendo

$$(72) \quad X_{(1)}^R = \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^{N_j} \min[\max(Y_{i,j} - L_j; 0); Q_j]$$

il risarcimento globale ceduto al riassicuratore in conseguenza dalla operatività della sola componente “per risk excess of loss”.

#### 5.4 Inflazione e riassicurazione “E.CO.MO.R.”

Nelle forme di riassicurazione non proporzionali occorre anche tenere conto delle conseguenze dell'**inflazione**, la quale può far sì che il risarcimento relativo a un sinistro che colpisce un contratto (o relativo ad una massa di sinistri che colpiscono un portafoglio) superi, al momento della liquidazione, la fissata priorità.

Questa evenienza si manifesta, in special modo, se la liquidazione dei sinistri è notevolmente differita nel tempo. Nella pratica riassicurativa è generalmente introdotta, a tale scopo, una **clausola di stabilità** che impegna l'assicuratore ad indicizzare la sua ritenzione adeguandola nel tempo al potere d'acquisto della moneta.

Un'interessante copertura riassicurativa non proporzionale che si prefigge di limitare le conseguenze negative derivanti dall'inflazione è la **riassicurazione “Excedent du COut MOyen Relatif”** (brevemente, “**E.CO.MO.R.**”), introdotta da Thépaut nel 1950.

Ai fini della sua applicazione è necessario ordinare i sinistri in base all'ammontare del relativo risarcimento. Nell'ipotesi che i risarcimenti siano ordinati in senso non crescente, tale garanzia riassicurativa opera analogamente alla riassicurazione “excess of loss”, con la differenza che la priorità corrisponde ora al risarcimento relativo all'*m*-esimo sinistro. A carico del riassicuratore sono quindi trasferiti i risarcimenti eccedenti tale priorità, riguardanti i primi (più grandi) *m*-1 sinistri.

## 6. Riassicurazioni miste

Alcune **riassicurazioni miste**, ottenute mediante combinazione di una forma riassicurativa proporzionale con una forma riassicurativa non proporzionale, sono di notevole interesse teorico oltrechè applicativo. Frequentemente in uso nei mercati riassicurativi è, in particolare, la riassicurazione mista descritta nel seguente esempio 5.

### Esempio 5

Si considerino una riassicurazione “aggregate excess of loss” ed una riassicurazione in quota. Indicati con  $L^G$  e con  $a$ , rispettivamente, la priorità e l’aliquota di conservazione che caratterizzano le due forme riassicurative, un’opportuna loro combinazione è data dalla copertura che mantiene a carico dell’assicuratore l’importo

$$(73) \quad X^A = \begin{cases} X & \text{se } X \leq L^G \\ L^G + a(X - L^G) & \text{se } X > L^G \end{cases}$$

e che trasferisce invece al riassicuratore l’importo

$$(74) \quad X^R = \begin{cases} 0 & \text{se } X \leq L^G \\ (1-a)(X - L^G) & \text{se } X > L^G \end{cases}$$

Tale copertura, pienamente rispondente alle esigenze dell’assicuratore, è inoltre preferita dal riassicuratore rispetto alle due garanzie che la compongono. Infatti:

- a differenza della riassicurazione “aggregate excess of loss”, essa coinvolge l’assicuratore anche per i sinistri eccedenti la priorità;
- a differenza della riassicurazione in quota, essa non prevede la partecipazione del riassicuratore alla copertura dei piccoli sinistri.

## 7. Politiche di ritenzione ottimale dei rischi

Un fondamentale aspetto dei profili attuariali della riassicurazione per le assicurazioni contro i danni è rappresentato dalla ricerca di una **politica di ritenzione ottimale dei rischi** (o, anche, **politica ottimale di riassicurazione**) con riferimento ad un portafoglio riassicurato (in forma proporzionale o non proporzionale, individuale o globale, ...).

Siano  $X_1, X_2, \dots, X_n$  i **risarcimenti globali** relativi agli  $n$  contratti del portafoglio a carico dell'assicuratore. A seguito della riassicurazione, siano  $X_1^A, X_2^A, \dots, X_n^A$  i corrispondenti **risarcimenti globali conservati** dall'assicuratore e, quindi,

$$(75) \quad X^A = \sum_{j=1}^n X_j^A$$

il **risarcimento globale conservato** dall'assicuratore in relazione all'intero portafoglio.

Introdotta un opportuno criterio di valutazione, il problema in esame può essere affrontato considerando:

- (1) il punto di vista dell'assicuratore, definendo così una **politica unilaterale di ritenzione ottimale dei rischi**;
- (2) il punto di vista dell'assicuratore e del riassicuratore, definendo così una **politica bilaterale di ritenzione ottimale dei rischi**.

La ricerca di una politica ottimale di riassicurazione (unilaterale o bilaterale) può essere condotta mediante uno dei seguenti **criteri di valutazione**:

- (a) **criterio dell'utilità attesa**;
- (b) **criterio della probabilità di rovina**.

In generale, nell'ipotesi che si considerino le **condizioni pure** del rapporto riassicurativo (quindi, il premio di riferimento è il **premio puro**), nella situazione antecedente il rapporto riassicurativo il **guadagno di portafoglio**, per l'assicuratore, è

$$(76) \quad G = \Pi - X \quad ,$$

mentre a seguito della riassicurazione si ha il guadagno

$$(77) \quad G^A = \Pi - \Pi^R - X^A \quad ,$$

dove  $\Pi^R$  è il premio (puro) di riassicurazione.

L'importo certo  $\Pi^R$  e l'importo aleatorio  $X^A$  dipendono:

- dalle aliquote di conservazione  $a_1, a_2, \dots, a_n$  fissate per i singoli contratti del portafoglio, nel caso di riassicurazione proporzionale individuale (**riassicurazione per eccedente di somma**);
- dall'aliquota di conservazione  $a$  fissata per tutti i contratti del portafoglio, nel caso di riassicurazione proporzionale globale (**riassicurazione in quota**);
- dalle priorità  $L_1, L_2, \dots, L_n$  fissate per i singoli contratti del portafoglio, nel caso di riassicurazione non proporzionale individuale (**riassicurazione “per risk excess of loss”**);
- dalla priorità globale (rispettivamente,  $L^G$  e  $q^{SL}$ ) fissata in relazione al portafoglio, nel caso di riassicurazione non proporzionale globale (rispettivamente, **riassicurazione “aggregate excess of loss”** e **riassicurazione “stop-loss”**).

Nel caso di una **riassicurazione individuale**, sia essa proporzionale o non proporzionale, la (46) assume, in particolare, l'espressione

$$(78) \quad G^A = \sum_{j=1}^n G_j^A = \sum_{j=1}^n (\Pi_j - \Pi_j^R - X_j^A) \quad .$$

## Bibliografia

- [1] **Booth P., Chadburn R., Cooper D., Haberman S., James D.**, *Modern actuarial theory and practice*, Chapman & Hall, London, 1999.
- [2] **Bühlmann H.**, *Mathematical methods in risk theory*, Springer, Berlin, 1970.
- [3] **Carter R., Lucas L., Ralph N.**, *Reinsurance*, Reactions Publishing Group, London, 2000.
- [4] **Chiarlo M.**, *Economia dell'assicurazione danni*, ECIG, Genova, 1997.
- [5] **Daboni L.**, *Lezioni di tecnica attuariale delle assicurazioni contro i danni*, LINT, Trieste, 1993.
- [6] **Daykin C., Pentikäinen T., Pesonen M.**, *Practical risk theory for Actuaries*, Chapman & Hall, London, 1994.
- [7] **Di Gropello G.**, *Principi di tecnica riassicurativa. La riassicurazione finanziaria e i derivati in riassicurazione*, LINT, Trieste, 1996.
- [8] **Gerathewohl K.**, *Reinsurance. Principles and practice*, Verlag Versicherungswirtschaft, Berlin, 1980.
- [9] **Grasso F.**, *Elementi di tecnica attuariale delle assicurazioni contro i danni*, Dipartimento di Matematica per le Decisioni, n.2, Firenze, 2005.
- [10] **Straub E.**, *Non-life insurance mathematics*, Springer, Berlin, 1988.
- [11] **Swiss Re Company**, *An introduction to reinsurance*, Zurich, 1996.
- [12] **Swiss Re Company**, *Proportional and non-proportional reinsurance*, Zurich, 1997.
- [13] **Swiss Re Company**, *Exposure rating*, Zurich, 2000.
- [14] **Swiss Re Company**, *Natural catastrophes and man-made disasters in 2004*, Sigma, n.1, 2005.
- [15] **Thépaut A.**, *Le traité d'Excédent du COut MOyen Relatif (E.CO.MO.R.)*, Bulletin Trimestriel de l'Institut des Actuaries Francais, n.192, 1950.